

3D Mesh Interest Point Detection using GISIFs and Heat Diffusion

Jan Hurtado*, Madeley Coaquira* and Cristian Lopez*[†]

*School of Computer Science, National University of Saint Augustine, Arequipa, Perú
jhurtadoj@unsa.edu.pe, madeley.coaquira@gmail.com

[†]School of Software Engineering, La Salle University, Arequipa, Perú
clopez@ulasalle.edu.pe

Abstract—To facilitate processing of 3D objects is common to use high-level representations. The interest points are one of them. An interest point should possess a distinctive feature regarding its locality and should be stable in different instances of the object. This article proposes a descriptor based on symmetry (GISIFs) and heat diffusion (HKS). From this features, we select a set of representative points. The GISIFs referenced in this article has not been used to extract local features. We compare our results with the results of other techniques, which make up the state of the art in interest point detection. We use a benchmark that evaluates the accuracy of the selected points with respect to an ideal set of interest points.

Keywords—interest point, Laplace-Beltrami operator, GISIFs, Heat Kernel Signature, geometry processing

I. INTRODUCCIÓN

Con el avance de la tecnología y de las técnicas de modelado, los repositorios de objetos 3D están presentando un crecimiento acelerado [1]. La necesidad de procesar esta información es cada vez más notoria. Diversas áreas como cine, televisión, video juegos, medicina, arquitectura, arqueología, mecánica, biología, química, física, etc., utilizan modelos 3D para representar la realidad o incluso la ficción. En ciencia de la computación cuando se hace referencia a este tipo de objetos, se ven involucrados los siguientes campos: computación gráfica, visión computacional, procesamiento geométrico y reconocimiento de patrones [2].

Existen diversas tareas sobre objetos 3D, como: búsqueda por similitud [3], búsqueda de correspondencias [4], búsqueda de simetría [5], segmentación, detección de componentes, compresión, etc. Las cuales pueden ser realizadas sobre distintas representaciones del objeto o los objetos en cuestión. Un objeto 3D se puede representar de muchas formas: nubes de puntos, mallas poligonales, pixeles volumétricos (*voxels*), etc. Todas ellas son representaciones de bajo nivel, y realizar las tareas anteriormente mencionadas puede llegar a ser muy complejo. Una representación de alto nivel permite reducir el dominio en el que se trabaja. Algunas de estas representaciones son: descriptores, esqueletos, grafos, componentes, etc. Una de ellas y hacia la que está orientado este artículo, son los puntos de interés o *key points*.

Un punto de interés es aquel punto que guarda alguna característica distintiva en su localidad y está presente en

diferentes instancias del objeto [6]. En el procesamiento de imágenes la detección de puntos de interés ha sido muy estudiada, y muchas técnicas de detección de puntos de interés en objetos 3D, son una extensión de los puntos de interés en 2D. Por ejemplo, la técnica de detección de esquinas de Harris [7], fue propuesta sobre objetos 3D por Glomb [8], y luego implementada por Sipiran y Bustos [9]. Por otro lado, existen técnicas basadas en representaciones espectrales. Tal es el caso de [10], que utiliza la descomposición del operador Laplace-Beltrami para detectar puntos con mayor retención de calor.

En este artículo se propone un descriptor basado en GISIFs (*Global Intrinsic Symmetry Invariant Functions*) y firmas de calor (*Heat Kernel Signature*). Ambas técnicas proporcionan características de simetría y difusión de calor, respectivamente. A partir del descriptor generado se realiza un proceso de selección y filtrado de puntos de interés. La selección es determinada de acuerdo a la característica del punto respecto a su vecindad. Además de ello, sólo se toman en cuenta los puntos cuyos valores estén por encima de un umbral. En la Figura 1, se presenta un esquema general de la propuesta.

La detección de puntos de interés puede ser subjetiva, depende mucho de la aplicación que se le quiera dar. Sin embargo, Dutagaci *et al.* proponen en [6], un *benchmark* basado en apreciaciones de distintos individuos. Cada individuo selecciona puntos de interés manualmente. Con este conjunto de datos se intenta consensuar puntos de interés determinantes.

La técnica propuesta presenta estabilidad y poca dependencia de los radios de tolerancia establecidos en los experimentos. La propuesta de GISIFs planteada en [11], no ha sido usada hasta el momento para detectar características locales. La combinación de características de simetría y difusión de calor; logra obtener resultados muy similares a los de HKS, usando mucho menos autovalores.

El artículo se organiza de la siguiente manera. En la Sección II se explica el estado del arte en la detección de puntos de interés. Algunas de las técnicas expuestas son usadas para los experimentos. La teoría en la que está basada la propuesta, se explica en la Sección III. Después de ello, en la Sección IV, se define el descriptor propuesto y la forma de selección de puntos de interés. En la Sección VI, se exponen los experimentos y resultados bajo el *benchmark* mencionado. Finalmente, en la Sección VII, se plantean conclusiones y trabajos futuros.

This work was supported by IPRODAM Research Group, National University of Saint Augustine, La Salle University and CONCYTEC.

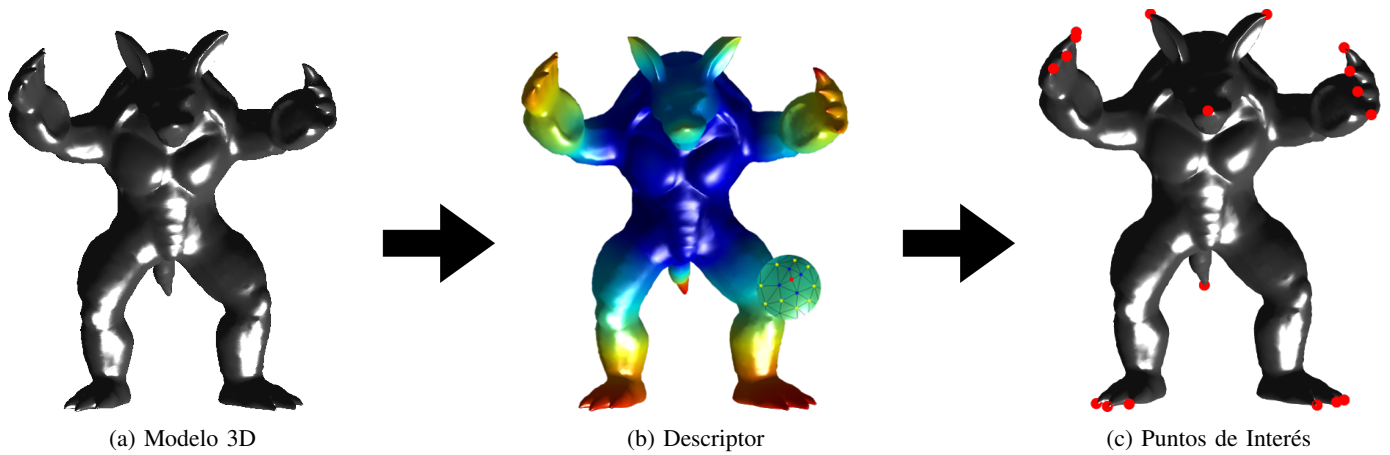


Figura 1: La propuesta consiste, primeramente, en generar un descriptor basado en simetría y difusión de calor. A partir de las características locales, se realiza un proceso de selección y filtrado de puntos de interés. La vecindad utilizada está determinada por el segundo nivel de adyacencias del punto evaluado.

II. TRABAJOS RELACIONADOS

Uno de los primeros trabajos que busca detectar características locales, fue propuesto por Gelfand *et al.* [12]. Su principal objetivo es detectar correspondencias, dando prioridad a los puntos de interés encontrados. Se propone un descriptor llamado *Integral Volume Descriptor*, que mide el volumen inmerso de la superficie en una esfera de radio determinado, con centro en el punto evaluado. De esta manera determina curvatura para cada punto. Los puntos de interés que selecciona, son aquellos que tienen una mayor curvatura respecto a los demás.

Lee *et al.* proponen en [13] un descriptor basado en la curvatura principal, evaluada localmente. Utiliza filtros gaussianos a diferentes escalas para obtener un valor de protuberancia para cada punto. Un punto será punto de interés si es un máximo local en su vecindad y es mayor a un umbral determinado. Ampliando este concepto, Castellani *et al.* aplican filtros gaussianos sobre los puntos del objeto en vez de utilizarlos sobre el valor de curvatura (*Salient Points*) [14].

En el 2007, Novatnack y Nishino, plantean la detección de puntos de interés usando una representación 2D del objeto [15]. Esta representación está basada en las normales y mapas de distorsión. La geometría del objeto es suavizada y la evolución de las normales es representada en varias escalas. Los puntos de interés serán aquellos con mayor curvatura en las diferentes escalas. Este método también es conocido como *SD-Corners*.

En [10] se propone un descriptor para determinar el calor retenido después de un tiempo dado. A cada punto se le asigna una firma de calor (*Heat Kernel Signature*). La firma está basada en la descomposición del operador Laplace-Beltrami y la ecuación de calor sobre dominios no euclídeos. Se calcula distintas firmas de calor para diferentes instantes de tiempo. Los puntos de interés seleccionados son aquellos que poseen una firma de calor mayor a todas las firmas de una vecindad. La vecindad está determinada por el segundo nivel de adyacencias del punto evaluado.

Como ya se mencionó, existen técnicas basadas en detec-

ción de puntos de interés sobre imágenes. Sipiran y Bustos implementaron la técnica Harris 3D [9], que está basada en la técnica de detección de esquinas de Harris y Stephens [7]. La idea principal de Sipiran y Bustos, es la siguiente: Extraer vecindades para cada punto del objeto. Ajustar una superficie para cada vecindad. Hallar las derivadas parciales para determinar la variabilidad del punto en la superficie. Pero para poder hacer esto, es necesario determinar invarianza a rotación para cada superficie ajustada. Mediante análisis de componentes principales (PCA), se ajusta un plano, cuya normal estará determinada por el autovector con el menor autovalor. Los puntos de interés serán aquellos con mayor variación, respecto a sus vecinos inmediatos. Otra técnica basada en puntos de interés sobre imágenes, es SIFT 3D [16], la cual está inspirada en [17]. Los puntos de interés son detectados sobre un modelo voxelizado, haciendo uso de filtros gaussianos.

Entre otras técnicas, están aquellas que utilizan múltiples vistas del objeto. Por ejemplo, en [18] se utiliza SIFT [17] para hallar puntos de interés en las vistas generadas a partir de puntos esparsos alrededor del objeto.

III. ANÁLISIS ESPECTRAL

III-A. Operador Laplace-Beltrami

El operador Laplace-Beltrami, se define como la divergencia del gradiente. Es una generalización del laplaciano para espacios planos o superficies [19]. Se denota de la siguiente manera:

$$\Delta f = \text{div grad } f$$

Existen diferentes formas de discretizar este operador. Meyer *et al.* proponen en [20], una manera de hacerlo en mallas triangulares. Definen la matriz del operador Laplace-Beltrami $L = (L_{ij})$, de la siguiente forma:

$$L_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{Si } (i, j) \text{ es una arista} \\ -A_i^{-1} \sum w_{ik} A_k & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad (1)$$



Figura 2: Descriptor propuesto con distintas ponderaciones. Izquierda: Descriptor con $A = 0,5$ y $B = 0,5$. Centro: Descriptor con $A = 0,25$ y $B = 0,75$. Derecha: Descriptor con $A = 0,15$ y $B = 0,85$.

$$w_{ij} = \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2A_i}$$

Donde w_{ij} es el peso asociado a la arista (i, j) . α y β son los ángulos opuestos a dicha arista. A_i es el área de voronoi del vértice i .

El operador Laplace-Beltrami, ha sido utilizado en múltiples aplicaciones. Por ejemplo, en [21] se propone un descriptor basado en su descomposición. Las autofunciones del operador Laplace-Beltrami, almacenan propiedades globales de la superficie [22].

III-B. GISIFs

El término GISIFs es utilizado para referirse a *Global Intrinsic Symmetry Invariant Functions*, que es un conjunto de funciones definidas sobre una variedad. Estas funciones son invariantes bajo toda simetría global intrínseca. Una simetría global intrínseca es un auto-homeomorfismo $T : M \rightarrow M$ que preserva todas las distancias geodésicas en una variedad M . Es decir, se cumple lo siguiente:

$$g(p, q) = g(T(p), T(q)) \quad (2)$$

Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ formará parte del conjunto de GISIFs, si para toda simetría global intrínseca T en M y para todo $p \in M$, se cumple lo siguiente:

$$f \circ T(p) = f(p) \quad (3)$$

A partir de ello, se pueden definir las siguientes propiedades:

1. Una función constante para todo p es GISIF.
2. Una GISIF multiplicada por una constante sigue siendo GISIF.
3. Dadas dos GISIFs f y g , las siguientes funciones también son GISIFs: $f + g$, $f - g$, $f * g$, f/g ($g \neq 0$)

Existen diferentes formas de definir GISIFs, algunas de ellas se explican en [23], [24], [25]. La técnica de GISIFs en la que se basó este artículo, utiliza la descomposición del operador Laplace-Beltrami en autovalores y autofunciones. Esto la convierte en una técnica espectral. Como es necesario trabajar en un ambiente discreto, la descomposición puede

ser truncada para utilizar los k autovalores más pequeños, ordenados ascendentemente, con sus respectivas autofunciones. En [11], Wang define GISIFs basándose en los autovalores repetidos. Para cada autovalor λ_i con l repeticiones, determina la siguiente función, que es GISIF:

$$f(p) = \sum_{j=1}^l \phi_{ij}^2(p) \quad (4)$$

Donde ϕ_{ij} representa la autofunción j -ésima para el autovalor λ_i , y $p \in M$. La demostración de este planteamiento puede revisarse en el artículo anteriormente mencionado.

En este artículo se propone la siguiente GISIF, que es una variante de la propuesta anterior:

$$f(p) = \frac{\sum_{j=1}^l \phi_{ij}^2(p)}{l\lambda_i} \quad (5)$$

Donde l es el número de repeticiones del autovalor λ_i .

Proof: Si $g(p) = \sum_{j=1}^l \phi_{ij}^2(p)$ es GISIF y $h(p) = l\lambda_i$ es GISIF por ser una función constante, según la propiedad 1. Entonces $f(p) = g(p)/h(p)$ también será GISIF por la propiedad 3. ■

El conjunto de GISIFs encontradas para k autovalores, forma el descriptor.

III-C. Heat Kernel Signature

La difusión de calor sobre dominios no euclídeos, está determinada por la siguiente ecuación:

$$\Delta_M u(x, t) = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (6)$$

Donde Δ_M es el operador Laplace-Beltrami para una variedad compacta de Riemann, y $u(x, t)$ es la ecuación de calor, que representa la cantidad de calor retenida en un punto x después de un tiempo t . Dada una distribución inicial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, el operador de calor (H_t) determina la distribución de calor a partir de f en un instante t . Se denota de la siguiente manera:

$$H_t f(x) = \int_M k_t(x, y) f(y) dy \quad (7)$$

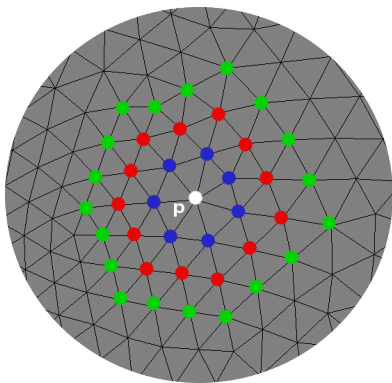


Figura 3: El punto blanco es el punto evaluado. Los puntos azules conforman un k -anillo de radio 1. Los puntos rojos conforman un k -anillo de radio 2. Los puntos verdes conforman un k -anillo de radio 3.

Donde $k_t(x, y)$ es la función mínima que satisface la ecuación 7, y es llamada núcleo de calor. El operador de calor satisface la ecuación de calor para todo tiempo t , y $\lim_{t \rightarrow 0} H_t(f) = f$. Si se asume que $H_t = e^{-t\Delta_M}$, es claro que las autofunciones de Δ_M y H_t serán las mismas, y $e^{-\lambda t}$ determinará los autovalores de H_t . λ representa los autovalores de Δ_M .

El núcleo de calor representa la cantidad de calor transmitida de un punto x a un punto y . Su descomposición está determinada por la siguiente ecuación:

$$k_t(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \quad (8)$$

Donde λ representa los autovalores y ϕ las autofunciones.

La firma de calor o *Heat Kernel Signature* está determinada de la siguiente manera: $HKS(x, t) = k_t(x, x)$ [10]. Al igual que con las GISIFs, en un ámbito discreto es necesario truncar la cantidad de autovalores y autofunciones:

$$HKS(x, t) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda_i t} \phi_i^2(x) \quad (9)$$

Donde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$. Para generar el descriptor se calcula firmas de calor para distintos intervalos de tiempo.

IV. DETECCIÓN DE PUNTOS DE INTERÉS

En este artículo se utiliza mallas triangulares para representar objetos 3D. La forma de discretización del operador Laplace-Beltrami utilizada, es la expuesta en la Sección III-A.

IV-A. Generación de descriptor

En este artículo se propone un descriptor híbrido que almacenará características de simetría y de difusión de calor. Las características de simetría serán determinadas por GISIFs especificadas en la Sección III-B, mientras que las características de difusión de calor serán determinadas por el descriptor *Heat Kernel Signature* (HKS).

En la práctica, detectar autovalores repetidos es complejo; ya que es necesario determinar un umbral de tolerancia. El

vector característico generado a partir de las GISIFs planteadas anteriormente, será de tamaño variable. El número de intervalos de tiempo del descriptor HKS será igual al número de GISIFs encontradas. El tiempo inicial (t_i) y tiempo final (t_f) para el descriptor HKS, será determinado de la misma forma propuesta en [10].

$$t_i = \frac{|4 * \log 10|}{\lambda_k}$$

$$t_f = \frac{|4 * \log 10|}{\lambda_2}$$

Donde λ_k es el último autovalor encontrado y λ_2 es el segundo autovalor.

El nuevo descriptor será determinado por la concatenación de los descriptores ya mencionados. Para ello es necesario dar una ponderación a cada uno, y de esta manera darle un grado de importancia:

$$HKS(p) = H(p) = \{h_0(p), h_1(p), \dots, h_n(p)\}$$

$$GISIFs(p) = G(p) = \{g_0(p), g_1(p), \dots, g_n(p)\}$$

$$D(p) = \{h_0(p)A, \dots, h_n(p)A, g_0(p)B, \dots, g_n(p)B\}$$

Donde A y B son los respectivos valores de ponderación, cuyos valores varían entre 0 y 1. D es el descriptor resultante de la concatenación. En la Figura 2 se observa el comportamiento de la sumatoria del descriptor para distintas ponderaciones.

IV-B. Selección de puntos de interés

El valor característico para cada punto será determinado por la función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, que está definida de la siguiente forma:

$$f(p) = \|D(p)\|_2$$

Donde D es el descriptor planteado anteriormente y $p \in M$.

Los puntos de interés deben cumplir dos condiciones:

1. Deben ser máximos locales, respecto a su valor característico.
2. Su valor característico debe ser mayor a un umbral dado.

Para determinar si un punto $p \in M$ es un máximo local, es necesario determinar una vecindad. Se hace uso del concepto de k -anillos, también usado por Sipiran y Bustos en [9]. Un k -anillo está definido de la siguiente forma:

$$\text{anillo}_k(p) = \{p' \in M / |\text{camino_mínimo}(p, p')| = k\}$$

Se asume que cada arista es de longitud 1. En la Figura 3 se observa k -anillos para distintos valores de k .

Una vecindad con radio k , será el conjunto formado por la unión de todos los anillos con radio $r \leq k$. Se puede definir de la siguiente forma:

$$\text{vecindad}_k(p) = \bigcup_{i=1}^k \text{anillo}_i(p)$$

Para que p sea un máximo local, su valor característico debe ser mayor al de todos sus vecinos.

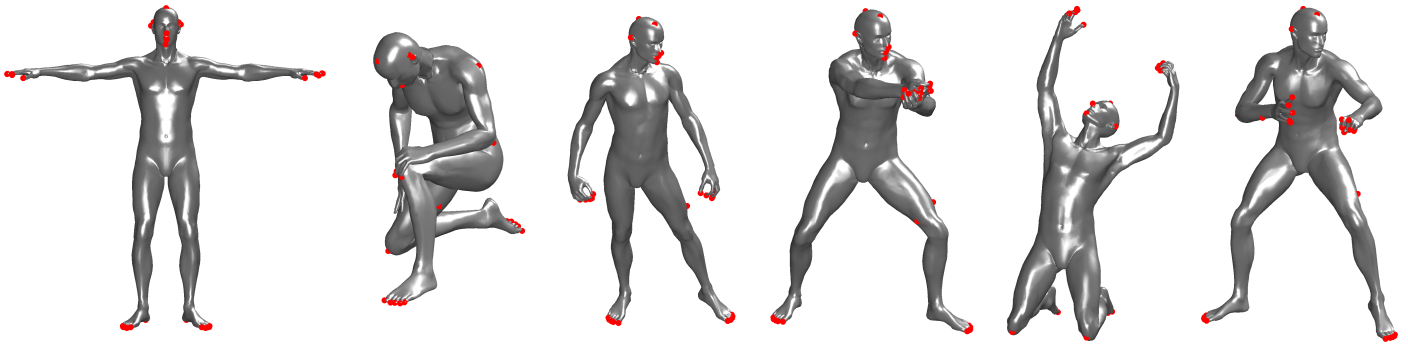


Figura 4: Puntos de interés detectados sobre transformaciones isométricas (modelos de [26]).

La otra condición que debe cumplir un punto de interés, es que su valor característico sea mayor a un umbral u dado. El umbral utilizado es determinado de la siguiente manera:

$$u = c \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f(p_i)$$

Donde n es el número de puntos en M y c es una constante que determinará el valor del umbral, respecto a la media aritmética.

En la Figura 4, se aprecia la estabilidad ante transformaciones isométricas. Los puntos rojos determinan los puntos de interés detectados. En la Figura 5, se muestra algunos modelos del *benchmark* utilizado en los experimentos. Es claro que los puntos son esparsos, y no siempre dependientes de la curvatura del objeto.

V. IMPLEMENTACIÓN

Los descriptores GISIFs y HKS, utilizan la descomposición del operador Laplace-Beltrami. Dado que la matriz construida no es simétrica, su descomposición se torna compleja. Para simplificar este proceso, es posible representar a L de la siguiente manera: $L = A^{-1}W$. Donde A es una matriz diagonal, cuyo elemento A_{ii} representa el área de voronoi del punto p_i . W es la matriz de pesos, que es simétrica semi-definida. Con esta representación, ahora se tiene un problema de autovalor generalizado: $W\phi = \lambda A\phi$. El cual es más simple de resolver. En las GISIFs, para determinar los autovalores repetidos, es necesario un umbral de tolerancia. El umbral de tolerancia utilizado es 5. El algoritmo del descriptor HKS, es el mismo planteado en [10]. Los valores de ponderación utilizados para generar el descriptor, son: $A = 0,15$ y $B = 0,85$. El descriptor es el resultado de la concatenación horizontal de los descriptores GISIFs y HKS, con sus respectivas ponderaciones. Los valores característicos son calculados hallando la norma del descriptor para cada punto. Al momento de filtrar los puntos de interés, es necesario determinar una constante c . Se utilizó $c = 0,7$. El número de autovalores fue variado al momento de realizar los experimentos, tanto para el descriptor HKS, como para la propuesta.

VI. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Se comparó la técnica propuesta con otras técnicas que conforman el estado del arte en la detección de puntos de interés. En la Sección II, se explican brevemente. Estas técnicas

son: Mesh Saliency [13], Salient-points [14], 3D-Harris [9], SD-Corners [15] y HKS [10].

Como ya se mencionó, el *benchmark* utilizado es [6]. El cual trabaja utilizando un conjunto de puntos de interés ideal. Estos puntos están basados en un experimento de apreciaciones de diferentes individuos, quienes seleccionaron manualmente los puntos que identificaron como los más representativos. Con estas entradas se busca consensuar el conjunto de puntos de interés ideal. Un punto de interés consensuado es aquel cuya repetibilidad es mayor a un n dado, bajo un radio de tolerancia $r = \sigma d_M$. Donde σ es una constante entre 0 y 1, y d_M es el diámetro de la esfera que contiene al objeto evaluado. Para los experimentos se utilizó $n = 11$ y $\sigma = 0,05$.

En el *benchmark* se definen los siguientes tipos de error. Falsos negativos, que son aquellos puntos que debieron ser detectados, pero no lo fueron. Falsos positivos que son aquellos puntos que no debieron ser detectados, pero lo fueron. Los experimentos se realizaron usando ambos errores y bajo radios de tolerancia de repetibilidad diferentes. Además, se plantea dos conjuntos de datos: A y B. El conjunto A contiene 29 modelos y el conjunto B contiene 43 modelos. Para mayor detalle puede revisar [6].

Las gráficas de las Figuras 7 y 8, muestran los resultados bajo los conjuntos A y B respectivamente. Cada conjunto de datos fue evaluado usando 100, 200 y 300 autovalores. Se toma en cuenta el error promedio de falsos negativos y falsos positivos, respecto a radios de tolerancia con $0 \leq \sigma \leq 0,12$. El desempeño de cada técnica está representado por los distintos colores especificados en las leyendas. La propuesta está en color rojo.

La técnica HKS, siempre tiende a tener un bajo error en falsos positivos y un elevado error en falsos negativos. Las otras técnicas tienden a tener un bajo error en falsos negativos y un alto error en falsos positivos. La técnica HKS, por lo general, no detecta muchos puntos de interés. Las otras técnicas detectan un número elevado y a veces excesivo, de puntos de interés. Esto se puede observar en la Figura 6. Es necesario aclarar que en las gráficas de las figuras 7 y 8, la técnica HKS fue evaluada usando 300 autovalores para un tiempo $t = 0,05$.

En general, en la técnica propuesta, se observa que mientras más autovalores sean considerados, el error de falsos negativos disminuye y el de falsos positivos se incrementa. Los cambios

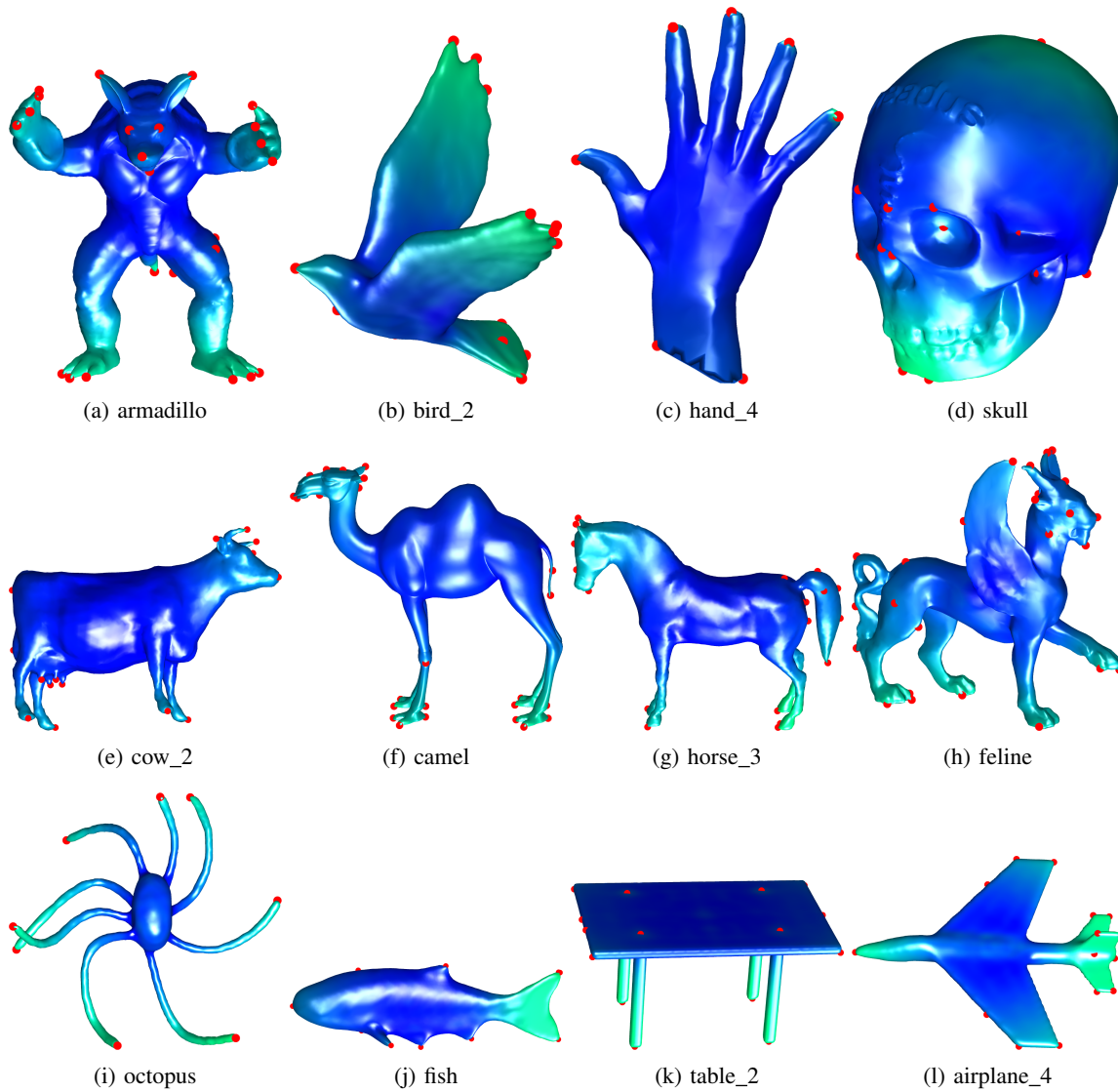


Figura 5: Puntos de interés detectados, usando 100 autovalores y autofunciones. La descripción de cada figura está dada de acuerdo al nombre de archivo del *benchmark* utilizado.

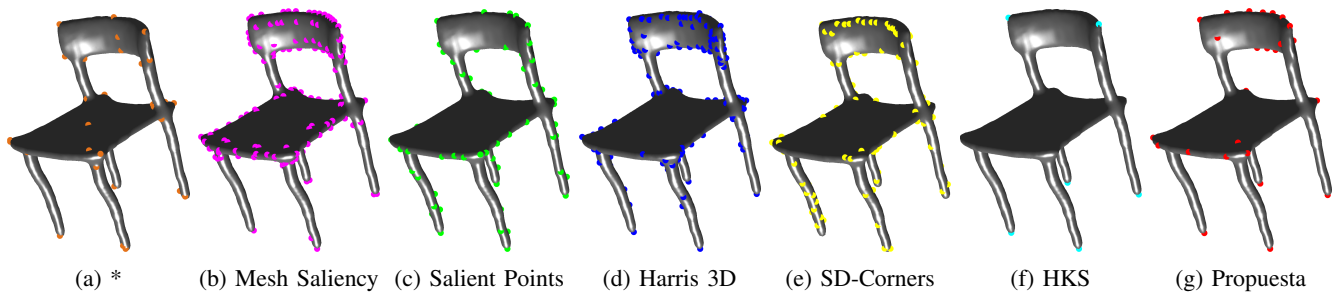
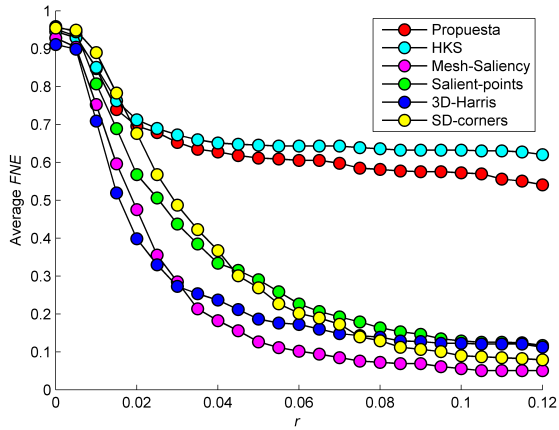
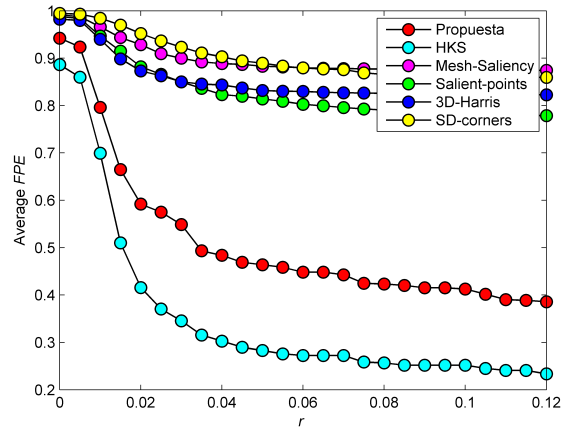


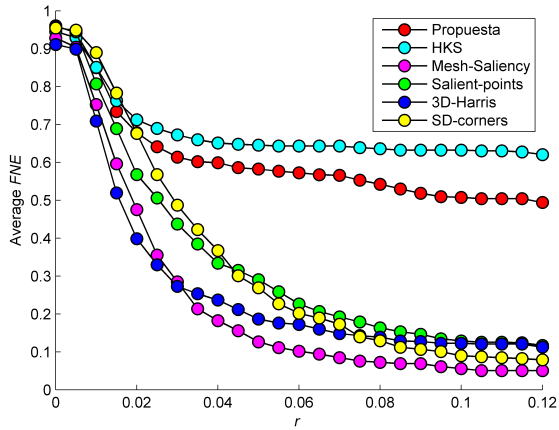
Figura 6: Resultados obtenidos sobre el modelo chair_4. En la Figura 6a se muestra los puntos consensuados del *benchmark*. En las otras figuras se muestra los puntos de interés detectados para cada técnica, incluyendo la propuesta.



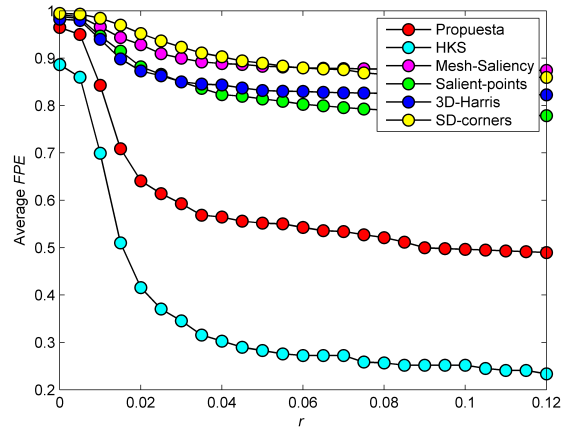
(a) Error promedio de falsos negativos, con 100 autovalores.



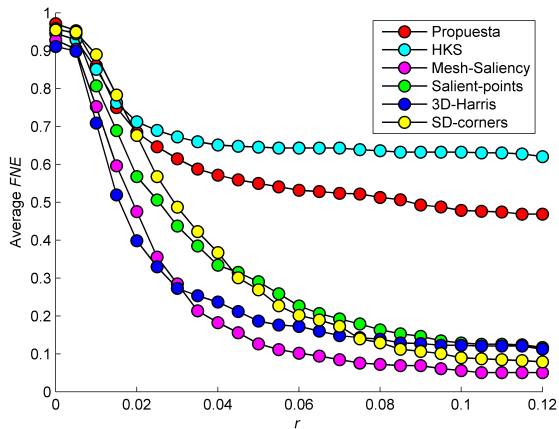
(b) Error promedio de falsos positivos, con 100 autovalores.



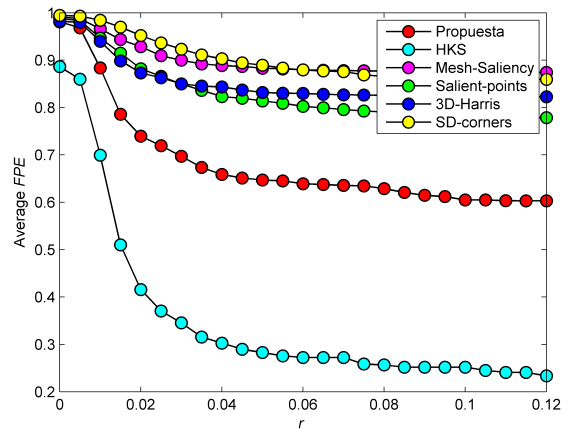
(c) Error promedio de falsos negativos, con 200 autovalores.



(d) Error promedio de falsos positivos, con 200 autovalores.

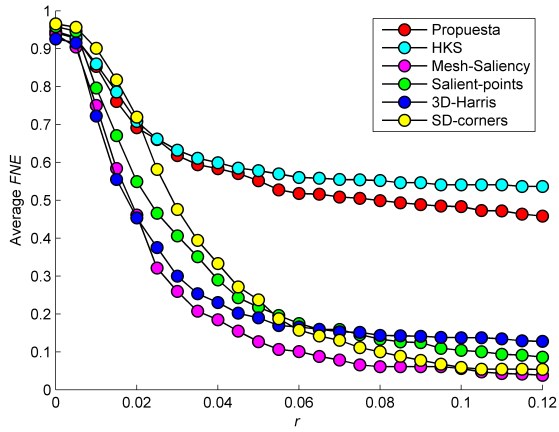


(e) Error promedio de falsos negativos, con 300 autovalores.

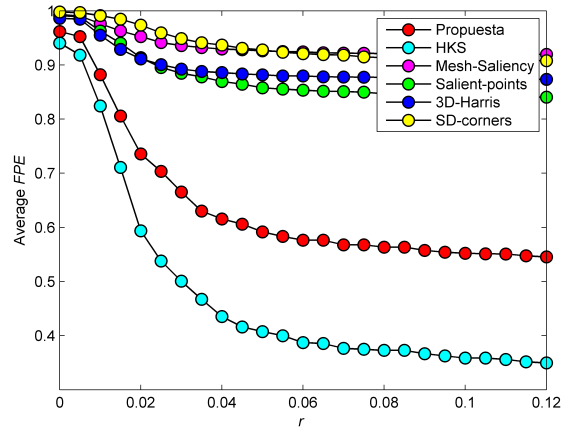


(f) Error promedio de falsos positivos, con 300 autovalores.

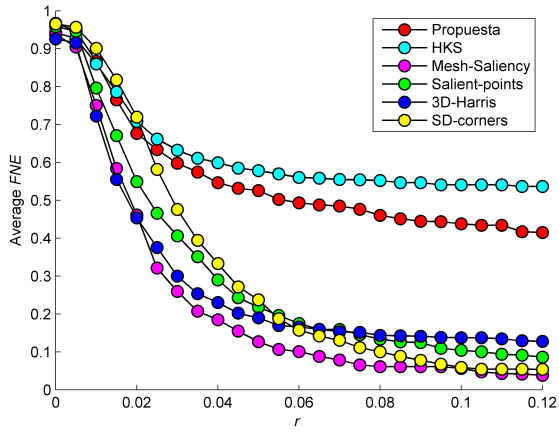
Figura 7: Resultados de error promedio obtenidos del conjunto A, para 100, 200 y 300 autovalores.



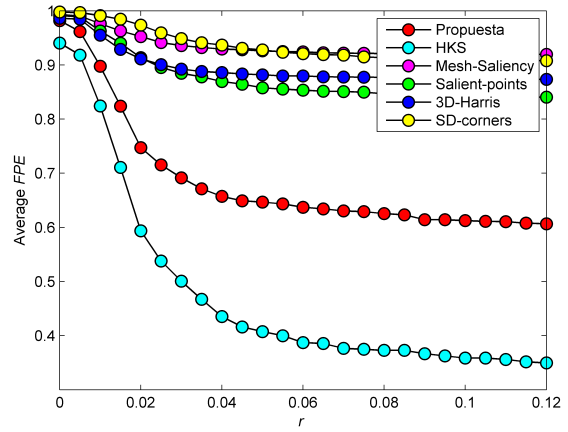
(a) Error promedio de falsos negativos, con 100 autovalores.



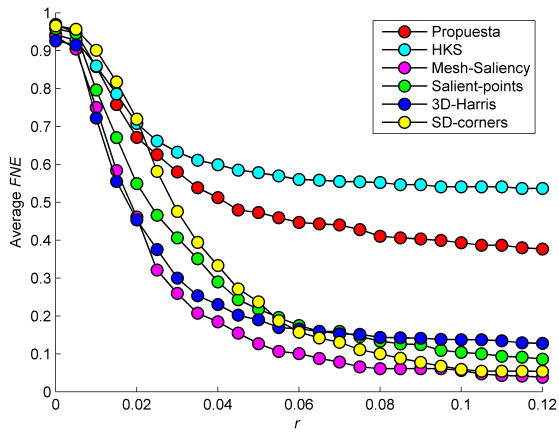
(b) Error promedio de falsos positivos, con 100 autovalores.



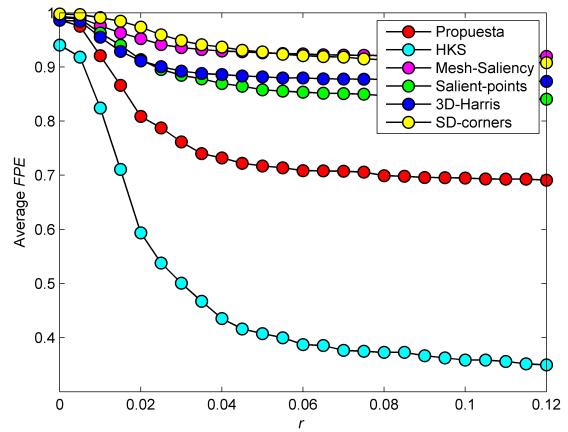
(c) Error promedio de falsos negativos, con 200 autovalores.



(d) Error promedio de falsos positivos, con 200 autovalores.

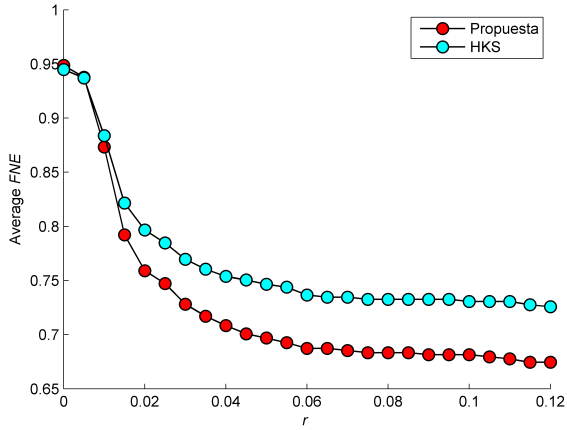


(e) Error promedio de falsos negativos, con 300 autovalores.

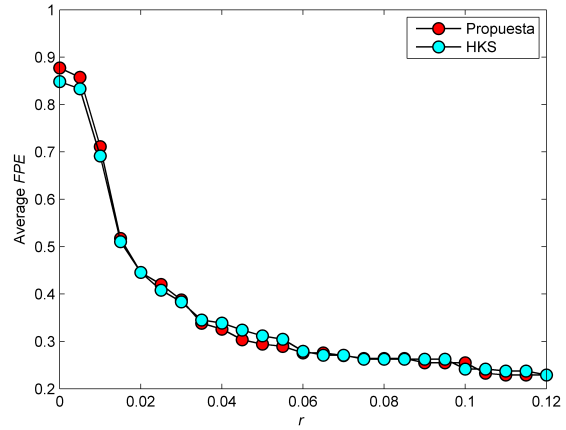


(f) Error promedio de falsos positivos, con 300 autovalores.

Figura 8: Resultados de error promedio obtenidos del conjunto B, para 100, 200 y 300 autovalores.

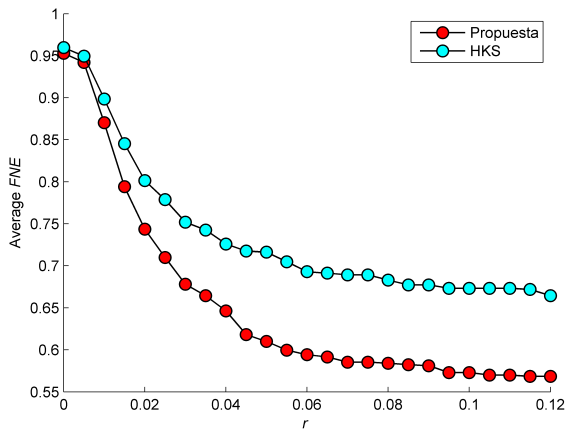


(a) Error promedio de falsos negativos, con 25 autovalores.

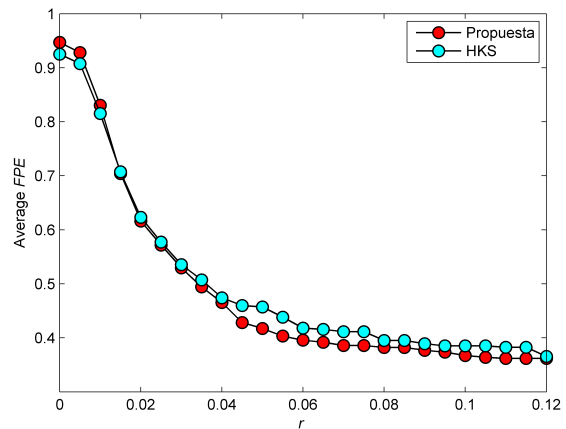


(b) Error promedio de falsos positivos, con 25 autovalores.

Figura 9: Resultados de error promedio obtenidos del conjunto A, para 25 autovalores.



(a) Error promedio de falsos negativos, con 25 autovalores.



(b) Error promedio de falsos positivos, con 25 autovalores.

Figura 10: Resultados de error promedio obtenidos del conjunto B, para 25 autovalores.

que presenta la propuesta no son tan abruptos como en las otras técnicas.

Por otro lado, se realizó experimentos usando 25 autovalores, tanto para la técnica propuesta como para HKS. Los resultados sobre el conjunto A se ven reflejados en la Figura 9 y los resultados sobre el conjunto B en la Figura 10. Es claro que se logra una mejora respecto a HKS (25 autovalores), y comparando con la versión de HKS, que usa 300 autovalores, se logra cierta semejanza.

VII. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

La técnica propuesta presenta menor dependencia de los radios de tolerancia que las demás técnicas, a excepción de HKS. En el caso de falsos negativos se ve evidenciado esto. Los cambios abruptos son influenciados por el alto número de puntos de interés seleccionados. Es lógico pensar que tendrán un menor error de falsos negativos, para radios grandes. Por otro lado, el tomar tantos puntos de interés, hace que el error

de falsos positivos se incremente. La propuesta alcanza una regularidad respecto a ambos errores.

A mayor número de autovalores, mayor número de puntos de interés serán seleccionados. Esto se debe a que, utilizando un mayor número de frecuencias en la descomposición del operador Laplace-Beltrami, se llega a un mayor nivel de detalle.

Con la técnica propuesta es posible aproximarse a los resultados de HKS, usando sólo 25 autovalores. Por ello se puede concluir que la propuesta mejora el tiempo computacional de HKS.

En este artículo no se evaluó la robustez de la propuesta frente a perturbaciones del objeto. Tampoco se mostró resultados usando variaciones en las ponderaciones o umbrales especificados. En trabajos futuros, se analizará la técnica tomando en cuenta estas apreciaciones.

Las aplicaciones como detección de correspondencias, recuperación de información, segmentación, detección de com-

ponentes, etc. quedan pendientes para ser evaluadas en otro trabajo.

REFERENCIAS

- [1] L. Gao, Y.-P. Cao, Y.-K. Lai, H.-Z. Huang, L. Kobbelt, and S.-M. Hu, "Active exploration of large 3d model repositories," *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2014.
- [2] A. Bronstein, M. Bronstein, and R. Kimmel, *Numerical Geometry of Non-Rigid Shapes*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 ed., 2008.
- [3] B. Li, Y. Lu, C. Li, A. Godil, T. Schreck, M. Aono, M. Burtscher, Q. Chen, N. K. Chowdhury, B. Fang, H. Fu, T. Furuya, H. Li, J. Liu, H. Johan, R. Kosaka, H. Koyanagi, R. Ohbuchi, A. Tsumura, Y. Wan, C. Zhang, and C. Zou, "A comparison of 3d shape retrieval methods based on a large-scale benchmark supporting multimodal queries," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 131, no. 0, pp. 1 – 27, 2015. Special section: Large Scale Data-Driven Evaluation in Computer Vision.
- [4] O. van Kaick, H. Zhang, G. Hamarneh, and D. Cohen-Or, "A survey on shape correspondence," *Computer Graphics Forum*, vol. 30, no. 6, pp. 1681–1707, 2011.
- [5] N. J. Mitra, M. Pauly, M. Wand, and D. Ceylan, "Symmetry in 3d geometry: Extraction and applications," in *EUROGRAPHICS State-of-the-art Report*, 2012.
- [6] H. Dutagaci, C. Cheung, and A. Godil, "Evaluation of 3d interest point detection techniques via human-generated ground truth," *The Visual Computer*, vol. 28, pp. 901–917, 2012. 10.1007/s00371-012-0746-4.
- [7] C. Harris and M. Stephens, "A combined corner and edge detector.," in *Alvey vision conference*, vol. 15, p. 50, Manchester, UK, 1988.
- [8] P. Głomb, "Detection of interest points on 3d data: Extending the harris operator," in *Computer Recognition Systems 3* (M. Kurzynski and M. Wozniak, eds.), vol. 57 of *Advances in Intelligent and Soft Computing*, pp. 103–111, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [9] I. Sipiran and B. Bustos, "Harris 3d: a robust extension of the harris operator for interest point detection on 3d meshes," *The Visual Computer*, vol. 27, no. 11, pp. 963–976, 2011.
- [10] J. Sun, M. Ovsjanikov, and L. Guibas, "A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion," in *Computer graphics forum*, vol. 28, pp. 1383–1392, Wiley Online Library, 2009.
- [11] H. Wang, P. Simari, Z. Su, and H. Zhang, "Spectral global intrinsic symmetry invariant functions," in *Proceedings of the 2014 Graphics Interface Conference*, pp. 209–215, Canadian Information Processing Society, 2014.
- [12] N. Gelfand, N. J. Mitra, L. J. Guibas, and H. Pottmann, "Robust global registration,"
- [13] C. H. Lee, A. Varshney, and D. W. Jacobs, "Mesh saliency," in *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 24, pp. 659–666, ACM, 2005.
- [14] U. Castellani, M. Cristani, S. Fantoni, and V. Murino, "Sparse points matching by combining 3d mesh saliency with statistical descriptors," in *Computer Graphics Forum*, vol. 27, pp. 643–652, Wiley Online Library, 2008.
- [15] J. Novatnack and K. Nishino, "Scale-dependent 3d geometric features," in *Computer Vision, 2007. ICCV 2007. IEEE 11th International Conference on*, pp. 1–8, Oct 2007.
- [16] A. Godil and A. I. Wagan, "Salient local 3D features for 3D shape retrieval," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 7864 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, p. 0, Mar. 2011.
- [17] D. G. Lowe, "Distinctive image features from scale-invariant keypoints," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 60, pp. 91–110, Nov. 2004.
- [18] R. Ohbuchi, K. Osada, T. Furuya, and T. Banno, "Salient local visual features for shape-based 3d model retrieval," in *Shape Modeling and Applications, 2008. SMI 2008. IEEE International Conference on*, pp. 93–102, June 2008.
- [19] G. Xu, "Discrete laplace–beltrami operators and their convergence," *Computer aided geometric design*, vol. 21, no. 8, pp. 767–784, 2004.
- [20] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr, "Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds," in *Visualization and Mathematics III* (H.-C. Hege and K. Polthier, eds.), Mathematics and Visualization, pp. 35–57, Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [21] R. M. Rustamov, "Laplace-beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation," in *Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*, pp. 225–233, Eurographics Association, 2007.
- [22] B. Levy, "Laplace-beltrami eigenfunctions towards an algorithm that understands"geometry," in *Shape Modeling and Applications, 2006. SMI 2006. IEEE International Conference on*, pp. 13–13, June 2006.
- [23] M. Ovsjanikov, J. Sun, and L. Guibas, "Global intrinsic symmetries of shapes," in *Proceedings of the Symposium on Geometry Processing, SGP '08*, (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland), pp. 1341–1348, Eurographics Association, 2008.
- [24] V. G. Kim, Y. Lipman, X. Chen, and T. Funkhouser, "Möbius Transformations For Global Intrinsic Symmetry Analysis," *Computer Graphics Forum (Proc. of SGP)*, vol. 29, no. 5, 2010.
- [25] D. Raviv, A. M. Bronstein, M. M. Bronstein, and R. Kimmel, "Full and partial symmetries of non-rigid shapes," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 89, pp. 18–39, Aug. 2010.
- [26] E. Boyer, A. M. Bronstein, M. M. Bronstein, B. Bustos, T. Darom, R. Horaud, I. Hotz, Y. Keller, J. Keustermans, A. Kovnatsky, R. Litman, J. Reininghaus, I. Sipiran, D. Smeets, P. Suetens, D. Vandermeulen, A. Zaharescu, and V. Zobel, "Shrec 2011: Robust feature detection and description benchmark," in *Proceedings of the 4th Eurographics Conference on 3D Object Retrieval, 3DOR '11*, (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland), pp. 71–78, Eurographics Association, 2011.